

Title	On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms
Author(s)	吉田, 敬之
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 843: 199-209
Issue Date	1993-06
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/83568">http://hdl.handle.net/2433/83568</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms

吉田 敬之 (京大理)

0. 以下に記すのは、1992年3月に行、た筆者の数理解析  
研究集会での講演(数理解析講究録810)の続篇である。その  
後の考察で幾つかの本質的な改良ができた。新しい結果は  
Theorems 3, 7である。重複を避ける意味でなるべく簡略に  
結果を説明する。詳しくは[Y2](又は[Y1])を見られたい。

1.  $F$  を  $n$  次の代数体 ( $n < \infty$ )、 $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ,  $H = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ ,  
 $\Omega$  を  $G/H$  の non-empty subset とする。  $G$  を  $G/H$  に左か  
ら作用させたときの  $\Omega$  の stabilizer を  $H'$  とする。有限次  
代数体  $F'$  があり、 $H' = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$  となる。 Shimura variety  
の zeta 函数についての簡単な思考実験により、 $H$  の表現か  
ら  $H'$  の表現を構成しうる筈である、という見通しが得られ  
る (cf. [Y2] の序)。これは実際可能であって、 $H$  の表現  $\sigma$   
から  $H'$  の表現  $\tau = \bigotimes_{\Omega} \text{Ind}_H^{H'} \sigma$  を得る (cf. [Y2], §1)。  
この操作  $\sigma \rightarrow \bigotimes_{\Omega} \text{Ind}_H^{H'} \sigma$  は誘導表現の一般化になっ  
て、Tensor induction と呼ぶ。

Theorem 1.  $E$  を有限次代数体,  $\lambda$  は  $E$  の finite place を表わすとし,  $\{\sigma_\lambda\}$  を  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$  の  $E$ -rational な  $\lambda$ -adic 表現の compatible system とする。このとき,  $\{\bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda\}$  は  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$  の  $E$ -rational な  $\lambda$ -adic 表現の compatible system である。

2.  $M$  を  $F$  上の,  $E$  を係数体とする motive とする。このとき,  $M$  の  $\lambda$ -adic realization  $\{H_\lambda(M)\}$  から,  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$  の  $E$ -rational な  $\lambda$ -adic 表現の compatible system が得られる。Theorem 1 により  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$  の  $E$ -rational な  $\lambda$ -adic 表現の compatible system が得られるが, この system がやはり motive によ, て得られているであろう, と予想される。

Conjecture 2.  $F'$  上の  $E$  を係数体とする motive.  $M' = \bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Res}_{F/F'}(M)$  が存在し, 任意の  $\lambda$  について  $H_\lambda(M')$  における  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$  の表現は,  $\bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Ind}_H^{H'} H_\lambda(M)$  と同値である。

$M \rightarrow \bigotimes_{\mathbb{Q}} \text{Res}_{F/F'}(M)$  は,  $F$  上の motives の category から  $F'$  上の motives の category への functor にな, ており, restriction of scalars functor の一般化にな, ている。これを tensor restriction と呼ぶ。Conjecture 2 の別の根拠として,  $F$  上の projective variety から  $F'$  上の projective variety を

作る操作を、Weil の restriction of scalars を一般化して定義できる (cf. [Y1], §1.9).

3. 以下  $F$  は総実と仮定する。  $J_F$  は  $F$  から  $\mathbb{C}$  の中への同型全ての集合とし、  $J_F$  を  $F$  の archimedean places の集合と同一視する。  $B$  を  $F$  上の quaternion algebra で

$$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{n-r}, \quad r > 0$$

をみたすものとする。  $B$  の split する archimedean places の集合を  $\delta \subset J_F$ , ramify する所を  $\delta' \subset J_F$  とする。  $|\delta| = r$ ,  $|\delta'| = n - r$ . このとき  $B$  は signature  $(\delta, \delta')$  であると呼ぶ。

$G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(B^\times)$  を  $B^\times$  から得られる  $\mathbb{Q}$  上の代数群とする。  $\pi$  を  $G_A$  の irreducible automorphic representation とする。  $\pi$  には  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$  の  $\lambda$ -adic 表現  $\sigma_\lambda$  が attach していると仮定する。これは  $\pi$  が arithmetic type のときには成立つ (cf. [C], [T]).

Theorem 3:  $L(\Delta, \pi, r_1) = L(\Delta, \bigotimes_{\lambda} \text{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda)$  が Euler  $p$ -factor,  $\lambda/p$  を除いて成立つ。

ここに  $r_1$  は  $G$  の  $L$ -group  ${}^L G = \text{GL}(2, \mathbb{C})^n \rtimes \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の  $2^r[F':\mathbb{Q}]$  次元の表現である (cf. [Y2]).  $L(\Delta, \pi, r_1)$  は、  $G$  から得られる Shimura variety の zeta 関数の

essential factor として現れるものである。Theorem 3 により, Shimura variety の zeta 函数を表わす Langlands の公式 [L1] が bad factor についても成立つことが証明できる。

4.  $Z$  を  $G$  の center とし,  $Z_A$  を  $F_A^\times$  と同一視する。  $I_F$  により  $J_F$  で生成される free abelian group を表わす。

$$k = \sum_{\tau \in \delta} k(\tau) \cdot \tau, \quad \kappa = \sum_{\tau \in \delta'} \kappa(\tau) \cdot \tau \in I_F,$$

$$k(\tau) \geq 0, \quad \kappa(\tau) \geq 0$$

とおく。  $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$  により,  $G_A$  上の weight が  $(k, \kappa)$  の automorphic forms の成す space を表わす (cf. [Y2], §6).

$\mathcal{S}_{k,\kappa}(B) \ni f$  は, 左  $G_{\mathbb{Q}}$  不変で  $\mathbb{C}^d$ ,  $d = \prod_{\tau \in \delta'} (\kappa(\tau) + 1)$  に値をもつ  $G_A$  上の函数である。  $f, g \in \mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$  に対して

$$\langle f, g \rangle = \int_{Z_{\infty+} G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \overline{f(x)} g(x) dx,$$

$$\text{vol}(Z_{\infty+} G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A) = 1$$

とおく。 ( $Z_{\infty+}$  は  $Z_A$  の archimedean part  $Z_{\infty}$  の単位元の連結成分を表わす。)  $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B, \mathbb{Q})$  により,  $\mathbb{Q}$ -rational forms の成す subset を表わす。

$\chi$  を  $\mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$  に現れる Hecke 作用素の固有値の system とする。これは次のことを意味すると解する。  $F_A^\times$  の位数有限の Hecke 指標  $\psi = \psi(\chi)$  があり, ある  $0 \neq f \in \mathcal{S}_{k,\kappa}(B)$  に対して

$$(1) \quad f|T(p) = \chi(p)f \quad \text{for almost all } p,$$

$$(2) \quad f(zx) = \gamma(z)f(x) \quad , \quad \forall z \in Z_A, \forall x \in G_A.$$

上の (1), (2) をみたす  $f \in S_{k,k}(B)$  の成す subspace を  $W(\chi, B)$  とかく。(  $\chi$  は常に、定めた  $\gamma$  を伴,  $\tau$  するとする。 )

$$W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}}) = W(\chi, B) \cap S_{k,k}(B, \overline{\mathbb{Q}})$$

とおく。 Jacquet - Langlands ([JL]) により,  $W(\chi, B) \neq \{0\}$  ならば,  $W(\chi, M_2(F)) \neq \{0\}$  であり,  $\chi$  は  $S_{m,0}(M_2(F))$

$$m(\tau) = \begin{cases} k(\tau) & , \tau \in \delta, \\ k(\tau) + 2 & , \tau \in \delta', \end{cases}$$

に現れる。

Theorem 4.  $f, g, h \in W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}})$ ,  $f \neq 0$  ならば  
 $\langle g, h \rangle / \langle f, f \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}$ .

Theorem 5.  $B_1, B_2$  はともに signature が  $(\delta, \delta')$  の  $F$  上の quaternion algebras,  $f \in W(\chi, B_1, \overline{\mathbb{Q}}) \cap S_{k,k}(B_1)$ ,  $g \in W(\chi, B_2, \overline{\mathbb{Q}}) \cap S_{k,k}(B_2)$  とする。  $k(\tau) \geq 2$ ,  $\forall \tau \in \delta$ ,  $f \neq 0$  ならば

$$\langle g, g \rangle / \langle f, f \rangle \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

totally real field  $F_1$  は  $F$  の  $k$  次 cyclic extension とする。  
 $\chi$  は  $S_{m,0}(M_2(F))$  に現れる Hecke 作用素の固有値の

system とする。  $m(\tau) = 1$ ,  $\forall \tau \in J_F$  の場合を除外する。  
 [L2] により,  $0 \neq f \in W(\chi, M_2(F))$  の base change lift  $\tilde{f}$   
 が  $\mathcal{A}_{\tilde{m}, 0}(M_2(F_1))$ ,  $\tilde{m}(\tau) = m(\tau|F)$ ,  $\tau \in J_{F_1}$  に存在する。  
 $\tilde{f}$  の定める Hecke 作用素の固有値の system を  $\tilde{\chi}$  とかき,  $\chi$  の  
 base change lift と呼ぶ。

Theorem 6.  $\chi$  は  $\mathcal{A}_{k, k}(B)$  に現れるとし,  $0 \neq g \in W(\chi, B, \overline{\mathbb{Q}})$   
 をとる。  $B_1 = B \otimes_F F_1$  とおく。このとき  $0 \neq \tilde{g} \in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbb{Q}})$   
 が存在する。さらに  $k(\tau) \geq 3$ ,  $\forall \tau \in \delta$  ならば,

$$\langle \tilde{g}, \tilde{g} \rangle / \langle g, g \rangle^l \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

$\chi$  は  $\mathcal{A}_{m, 0}(M_2(F))$  に現れるとし, 任意に  $\delta \subset J_F$ ,  
 $\delta \neq \emptyset$  をとる。 $\chi$  は  $\mathcal{A}_{k, k}(B)$ ,  $B$  は signature  $(\delta, \delta')$  に現  
 れるとは限らない。そこで  $F_1$  を上記の様にとり,  $B_1$  を  $F_1$   
 上の signature が  $(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}')$  の quaternion algebra とする。ここに  
 $\tilde{\delta}' = J_F \setminus \delta$ ,  $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}'$  は制限写像  $J_{F_1} \rightarrow J_F$  による  $\delta, \delta'$   
 の full inverse images を表わす。 $F_1, B_1$  をうまくとると  
 ( $l=2$  でよい),  $\tilde{\chi}$  は  $\mathcal{A}_{\tilde{k}, \tilde{k}}(B_1)$  に現れる。そこで  
 $0 \neq \tilde{g} \in W(\tilde{\chi}, B_1, \overline{\mathbb{Q}})$  をとり,

$$Q(\chi, \delta) = \langle \tilde{g}, \tilde{g} \rangle^{1/2} \quad (\text{任意の } l \text{ 乗根})$$

とおく。Theorems 4 ~ 6 により,  $m(\tau) \geq 3$ ,  $\forall \tau \in \delta$ ,  
 $m(\tau) \geq 2$ ,  $\forall \tau \in J_F$  のときは,  $Q(\chi, \delta) \bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times$  が well

defined になることが容易にわかる。(即ち  $F_1, B_1, \mathcal{Y}$  のとり方に依存しない。) これが Shimura [Sh5], [Sh6] で定義された  $\chi$  の  $\mathbb{Q}$ -invariant で、上の結果はその拡張になっている。

$\chi, \chi'$  はそれぞれ  $\mathcal{J}_{k,0}(M_2(F))$ ,  $\mathcal{J}_{l,0}(M_2(F))$  に現れるとする。

$$D(A, \chi, \chi') = \sum_{\alpha} \chi(\alpha) \chi'(\alpha) N(\alpha)^{-A}$$

とおく。これは本質的に  $\chi$  と  $\chi'$  の Rankin-Selberg convolution で全平面有理型の函数を定める。

Theorem 7.  $\delta, \delta' \neq \emptyset$ ,  $J_F = \delta \cup \delta'$  (disjoint union) とする。

$k(\tau) > l(\tau)$ ,  $k(\tau) \geq 3$ ,  $\forall \tau \in \delta$ ,  $k(\tau) < l(\tau)$ ,  $l(\tau) \geq 3$ ,

$\forall \tau \in \delta'$  と仮定する。  $A = \sum_{\tau \in \delta} k(\tau) + \sum_{\tau \in \delta'} l(\tau)$  とおく。

$k(\tau) + l(\tau) \pmod{2}$  が  $\tau$  に依存せず、 $\tau \in \mathbb{Z}$  が

$$\tau \equiv k(\tau) + l(\tau) \pmod{2},$$

$$2 \leq \frac{\tau}{2} \leq 1 + \frac{|k(\tau) - l(\tau)|}{2}, \quad \forall \tau \in J_F$$

をみたすならば

$$D\left(\frac{\tau}{2}, \chi, \chi'\right) / \pi^A Q(\chi, \delta) Q(\chi', \delta') \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

証明の point は、 $F$  の総実 2 次拡大体  $F_1$  をとり、[Sh5], Theorem 5.3 と上に与えた  $Q(\chi, \delta)$ ,  $Q(\chi', \delta')$  の定義を用いることである。(実際には、3 個の 2 次拡大体を用いて、



$D(\frac{\pi}{2}, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}')$  の関係を分析する。)

5. Conjecture 2 と Deligne の予想 [D3] により、 $F$  上の quaternion algebra  $B$  から得られる Shimura variety の zeta 函数の critical values の超越部分が  $\pi$  の巾と  $\mathbb{Q}$ -invariant の積で書けることがわかる。この事実の大要は [Y2] に書いたもので省略するが、[Y2] の Conjecture 4.1 (Hilbert modular form  $f \in S_{k,0}(M_2(F))$  に attach した motive についての予想) の correction を書く。

(2) は不正確で

$$\begin{aligned} & H_B(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ &= \bigoplus_{\tau \in J_F} \left( H^{(k_0+k(\tau))/2-1, (k_0-k(\tau))/2}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \right. \\ & \quad \left. \oplus H^{(k_0-k(\tau))/2, (k_0+k(\tau))/2-1}(R_{F/\mathbb{Q}}(M_f)) \right) \end{aligned}$$

とすべきである。[Y2] での形に書くならば、weight  $k$  を  $J_F = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$  から  $\mathbb{Z}$  の中への mapping とみて

$$\begin{aligned} & H_{\tau,B}(M_f) \otimes_{E,\sigma} \mathbb{C} \\ &= H^{(k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1, (k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2}(\tau, \sigma, M_f) \\ & \quad \oplus H^{(k_0-k(\sigma^{-1}\tau))/2, (k_0+k(\sigma^{-1}\tau))/2-1}(\tau, \sigma, M_f) \end{aligned}$$

となる。( [Sh2], Prop. 2.6 により  $k$  は  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$  で左不変である。  $\sigma \in J_E$  の  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  への拡張を同じ大文字  $\sigma$  で表わした。  $k(\sigma^{-1}\tau)$  はこの拡張のとり方に依存しない。)

さらに、  $H_{\text{DR}}(M_f)$  上の Hodge filtration ( $E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ -modules に

よる)を定めなければ予想としても不完全であるが、これは完全に書き切れる。これと関係して、 $\tau$ -periodの定義と、それを用いた周期についての結果も、さらに精密化される。  
[Y1]に詳しく書いておいた。

## References

- [BL] J.-L. Brylinski et J.-P. Labesse, Cohomologie d'intersection et fonctions  $L$  de certaines variétés de Shimura, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 17(1984), 361–412.
- [Bl1] D. Blasius, On the critical values of Hecke  $L$ -series, *Ann. of Math.* 124(1986), 23–63.
- [Bl2] D. Blasius, Appendix to Orloff: Critical values of certain tensor product  $L$ -functions, *Inv. Math.* 90(1987), 181–188.
- [Bo] A. Borel, Automorphic  $L$ -functions, *Proc. Symposia Pure Math.* 33(1979), part 2, 27–61.
- [BZ] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinski, Representations of the group  $GL(n, F)$ , where  $F$  is a local non-archimedean field, *Russian Math. Surveys* 31:3(1976), 1–68.
- [C] H. Carayol, Sur les représentations  $l$ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 19(1986), 409–468.
- [D1] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES* 35(1968), 107–126.
- [D2] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$ , in *Modular functions of one variable II*, 501–597, *Lecture notes in Math.* 349, 1973, Springer Verlag.
- [D3] P. Deligne, Valeurs de fonctions  $L$  et périodes d'intégrales, *Proc. Symposia Pure Math.* 33(1979), part 2, 313–346.
- [JL] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on  $GL(2)$ , *Lecture notes in Math.* 114, 1970, Springer Verlag.
- [K] R. E. Kottwitz, Shimura varieties and  $\lambda$ -adic representations, *Automorphic forms, Shimura varieties and  $L$ -functions I*, 161–209, *Perspectives in Math.* 10(1990), Academic Press.
- [L1] R. P. Langlands, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, *Can. J. Math.* XXXI(1979), 1121–1216.
- [L2] R. P. Langlands, Base change for  $GL(2)$ , *Ann. of Math. Studies No. 96*, Princeton University Press, 1980.
- [R] D. E. Rohrlich, Nonvanishing of  $L$ -functions for  $GL(2)$ , *Inv. Math.* 97(1989), 381–403.
- [O] M. Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, *Japan. J. Math.* 9(1983), 1–26.

- [Se1] J.-P.Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.
- [Se2] J.-P.Serre, Abelian  $l$ -adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.
- [Sh1] G.Shimura, On the Fourier coefficients of modular forms of several variables, Göttingen Nachrichten (1975), Nr. 17, 1–8.
- [Sh2] G.Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45(1978), 637–679.
- [Sh3] G.Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313–375.
- [Sh4] G.Shimura, On certain zeta functions attached to two Hilbert modular forms I, II, Ann. of Math. 114(1981), 127–164, 569–607.
- [Sh5] G.Shimura, Algebraic relations between critical values of zeta functions and inner products, Amer. J. Math. 104(1983), 253–285.
- [Sh6] G.Shimura, On the critical values of certain Dirichlet series and the periods of automorphic forms, Inv. Math. 94(1988), 245–305.
- [Sh7] G.Shimura, On the fundamental periods of automorphic forms of arithmetic type, Inv. Math. 102(1990), 399–428.
- [Sh8] G.Shimura, The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms, Duke Math. J. 63(1991), 557–613.
- [T] R.Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, Inv. Math. 98(1989), 265–280.
- [VS] Variétés de Shimura et fonctions  $L$ , Publication mathématique de l'Université Paris-VII, 1979.
- [W] A.Weil, The field of definition of a variety, Amer. J. of Math. 78(1956), 509–524.
- [Y1] H.Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, preprint, 1992.
- [Y2] 吉田敬之, 保型形式の周期について,  
数理解析研究所講究録 810, 218–263.